

Inleiding

Het belang van ‘Goddelijke Verhouding’

De ‘Goddelijke Verhouding’ is geschreven aan het eind van de vijftiende eeuw door de Franciscaner broeder Fra Luca Bartolomeo de Pacioli. Zijn naam wordt soms ook als Paciolo of Paccioli gespeld. Hij was afkomstig uit het Toscaanse Borgo San Sepolcro (nu Sansepolcro), maar had contacten in verscheidene steden: hij studeerde in Venetië en Rome, werkte daarnaast als wiskundeleraar in Perugia en Milaan en bezocht tijdens zijn leven ook Napels, Rome en Zara (het huidige Kroatische Zadar, dat destijds onder Venetiaanse invloed stond). Pacioli vergaarde bekendheid met het traktaat “Summa de arithmetica, geometria, proportione et proportionalità”, gedrukt in 1494. Twee jaar later riep Ludovico Maria Sforza (1452–1508, hertog van Milaan vanaf 1494) hem naar zijn hof om er deel uit te maken van zijn geleerde entourage. In 1498 voltooide Pacioli daar de manuscripten van zijn boek ‘Goddelijke Verhouding’. Eén kopie werd gemaakt voor Ludovico Sforza en ligt nu in de Bibliothèque publique et universitaire de Genève (Ms. I.e. 210). Een tweede was bestemd voor Galeazzo (da) Sanseverino, de belangrijkste legerleider in dienst van de hertog, en dit exemplaar wordt nu bewaard in de Biblioteca Ambrosiana in Milaan (Ms. 170 sup.). Er zou ook een derde manuscript zijn geweest, opgedragen aan Piero Soderini, een gezagsdrager in Florence. Over het bestaan van dit derde handschrift zijn de meningen echter verdeeld: sommigen stellen dat het verloren ging (zie [15]: “il terzo, perduto, era dedicato a Pier Soderini”), terwijl anderen beweren dat het nooit heeft bestaan en dat er wellicht verwarring was met de gedrukte versie, die ook aan hem was opgedragen (zie [58], p. 20). Anderen zeggen dan weer dat de versie was bestemd voor Ludovico Sforza en verloren is gegaan (zie [54], p. 70). De gedrukte versie verscheen meer dan tien jaar later, in 1509, bij Paganinus de Paganinus in Venetië.

Ook Leonardo da Vinci werkte aan het hof van Milaan, van 1482 tot 1499. Hij moet toen al interesse

hebben getoond voor Pacioli’s werk, want hij bezat een exemplaar van diens “Summa” nog vóór hij hem ontmoette. Voor de ‘Goddelijke Verhouding’ maakte hij dan ook de ontwerpen voor de ongeveer 60 gekleurde tekeningen van veelvlakken die de manuscripten illustreerden en die in de gedrukte versie door houtsneden werden vervangen. Het was de allereerste keer dat veelvlakken zo spectaculair werden voorgesteld en als driedimensionale voorstellingen uit het papier leken te springen.

De ‘Goddelijke Verhouding’ veroorzaakte een ware ‘veelvlakkenmanie’ in Europa: de Neurenbergse kunstenaars Albrecht Dürer, die Leonardo ontmoet zou hebben (zie [53]), Wenzel Jamnitzer en Lorenz Stöer tekenden uitvoerig veelvlakken; ‘onze’ Simon Stevin en Claes Pietersz van Deventer publiceerden erover; Johannes Kepler herontdekte de complete lijst van regelmatige veelvlakken uit de tijd van de Grieken en voegde er in 1619 zelfs twee nieuwe aan toe door ook pentagrammen in aanmerking te nemen. In de zeventiende eeuw nam de belangstelling voor het kunstzinnig voorstellen van veelvlakken af, al ging de wiskundige studie in het vakgebied wel door. In 1809 ontdekte de Fransman Louis Poincaré nog twee nieuwe lichamen door ook onderling snijdende zijvlakken toe te laten. De Engelsman John Flinders Petrie voegde er in 1926 nog drie oneindige regelmatige veelvlakken aan toe, in samenwerking met de Canadees Donald (MacDonald) Coxeter. Een revival kwam er op kunstzinnig gebied met het werk van de Amerikaanse architect Buckminster Fuller. Zijn ontwerpen bleken zo invloedrijk dat de Nobelprijswinnaars die de C_{60} -moleculen ontdekten haar de naam ‘Buckminsterfullerene’ gaven, hoewel de vorm van die moleculen overeenkomt met een veelvlak uit de ‘Goddelijke Verhouding’, beschreven door Pacioli en getekend door Leonardo. In Europa zorgde het werk van de Nederlandse kunstenaar Maurits Cornelis Escher voor een heropleving van de kunstzinnige studie van veelvlakken, en later stelden ook de Belg Luc Tuymans en de

Deense IJslander Olafur Eliasson veelvlakken voor. Uiteindelijk veroverden Pacioli's en Leonardo's veelvlakken de hele wereld; ook de veelzijdige Chinese kunstenaar Ai Weiwei liet zich erdoor inspireren.

Een vertaling vandaag

Deze heropleving van de liefde voor veelvlakken is een eerste goede reden om de grondlegger hiervan eer te bewijzen met deze eerste vertaling in het Nederlands, vijfhonderd jaar na het verschijnen van de originele tekst. Zo'n vertaling is niet geheel zonder risico: Pacioli's traktaat zou gepercipieerd kunnen worden als onleesbaar of 'wetenschappelijk achterhaald'. Gelukkig schreef Pacioli zijn boek niet als een dorre wiskundige uiteenzetting, maar als een handboek, dat zowel aan studenten als aan het algemene publiek – zoals de hofhouding van Ludovico Sforza – inzicht wilde bieden in de bouwstenen van de ruimte. De *'Goddelijke Verhouding'* was bedoeld als een werk dat wiskunde ook aan niet-wiskundigen moest bijbrengen, door bestaande bevindingen samen te vatten en een begrijpelijk overzicht te geven van moeilijke materie.

Hoewel de talloze namen en beschrijvingen de leesbaarheid op het eerste gezicht niet lijken te vergroten, brengt deze Italiaanse sfeertekening afwisseling tussen de wiskundige beschouwingen, en biedt ze ons inzicht in de culturele context van Pacioli's traktaat. Zo geeft de auteur ons een levendig beeld van zijn relatie tot het hertogelijk hof waar hij, met zijn boek in de hand, een goede indruk wilde maken. In de vele malen dat hij zich tot de 'nobile Hertog' richt, kan men het haast tijdloze fenomeen van patronage herkennen: ook vandaag verschijnen in veel wetenschappelijke teksten 'acknowledgements' ten aanzien van een instantie of persoon die een bepaald onderzoek financierde. Met lofuitingen aan het adres van meerdere hertogen en stadsbestuurders, maar ook met treffende verwijzingen naar de Italiaanse oorlogen die uitbraken na 1494, maakt Pacioli's traktaat bovendien de politieke versnippering en het broze bestaan in vroegmodern Italië voelbaar. Treffend zijn daarnaast het belang dat hij hechtte aan het goddelijke karakter van zijn wiskundige vormen en de christelijke invulling van de theorieën die hij overnam van zijn geliefde *'antichi'*, met name de oude Grieken. Verwijzingen naar het Oude Testament, het evangelie en meerdere Franciscaanse bouwwerken uit zijn tijd verschaffen de moderne lezer inzicht in Pacioli's geestelijke referentiekader.

In dat kader mag overigens enig pro-Toscaans 'campanilismo' (of lokaal patriotisme) niet ontbreken. In *'De*

architettura' verwijt Pacioli de beroemde Leon Battista Alberti, wiens vader uit Florence verbannen was, dat deze zijn regio van afkomst onvoldoende in de schijnwerpers zette en in plaats daarvan Italië in haar geheel prees. In Pacioli's pro-Toscaanse programma passen ook de citaten van Dante en Petrarca – twee van Italië's *'tre corone'*, die aan de basis stonden van de Italiaanse taal en literatuur –, die hij hier en daar in de *'Goddelijke Verhouding'* verwerkte. Pacioli beschouwde deze auteurs als waardige bronnen voor een volkstaal, die in alle domeinen toepasbaar en voor een breed publiek toegankelijk moest zijn. Omwille van dit ideaal schreef hij dan ook in het Italiaans en niet in het Latijn, dat in zijn eeuw nog de meest gangbare taal was voor de wetenschap.

Toch is het boek niet alleen een leerboek of een werk ter verspreiding van de wetenschappen. Enkele jaren vóór de *'Goddelijke Verhouding'* had Pacioli's stadsgenoot Piero della Francesca het *'Trattato dell'abaco'* geschreven, waarin hij praktische vraagstukken behandelde, zoals de berekening van de volumes van de regelmatige lichamen. Della Francesca herontdekte toen ook enkele half-regelmatige lichamen, de zogenaamde Archimedische lichamen, waarvan Pacioli er vier overnam en deze aanvulde met twee nieuwe voorbeelden. Bovendien voegde Pacioli ook een eigen reeks uitbreidingen toe, door het aanbrengen van piramides op de gekende veelvlakken. Dit idee van 'verheven' veelvlakken (*'elevated polyhedra'*) was origineel. Hoewel Giorgio Vasari Pacioli beschuldigde van plagiaat (zie [72], pp. 208 en 212), kan men duidelijke referenties terugvinden die aantonen dat Pacioli Piero della Francesca bijvoorbeeld zeer erkentelijk was en uitvoerig prees in zijn boek.¹ Hiermee vervulde Pacioli de wens van de blind geworden Piero dat zijn werk alsnog bekend gemaakt zou worden (zie [60], p. 32).

Een minder positieve reden voor de noodzaak van deze vertaling is de onuitroeibare 'mythe van de gulden snede'. De Duitse vertaling heeft zelfs als titel *'Divina Proportione: Die Lehre vom Goldenen Schnitt'*, hoewel de term 'gulden snede' pas rond 1830 ingang vond. De 'mythe van de gulden snede' stelt dat een ontwerp, een muziekstuk, een mens, een schelp, of welk voorwerp of wezen ook, slechts mooi is indien de verhouding van de gulden snede, $\phi = 1,618\dots$, erin vervat is (zie [70]). Bewijzen hiervan zouden te vinden zijn in werken van alle tijden, van de piramides van Cheops, de beelden en bouwwerken van de oude Grieken, de Renaissancekunst, tot en met actuele dagelijkse gebruiksvoorwerpen, maar de wetenschappelijke grond hiervoor is erg betwistbaar:

1. Zo schrijft Pacioli letterlijk: "... onze land- en tijdgenoot die in deze eeuw uitblinkt in dat vak: 'maestro' Piero della Francesca, die ik al in een waardig compendium heb verwerkt en goed heb bestudeerd" (zie *'De Architettura'*, p. 23).

de ‘leer van de gulden snede’ is voor de wiskunde wat de astrologie is voor de astronomie of de homeopathie voor de geneeskunde. Pacioli’s boek heeft als titel ‘*Goddelijke Verhouding*’ en handelt inderdaad onder meer over die verhouding, maar wie de tekst naleest zal vaststellen dat Pacioli enkel oproept om de regelmatige veelvlakken (en dus de goddelijke verhouding, zij het impliciet) te verwerken in ontwerpen (‘*De Architectura*’, hoofdstuk XVIII). In ‘*De Architectura*’ bespreekt hij de verhoudingen in het menselijk lichaam en stelt hij expliciet dat de kunstenaar bepaalde eenvoudige proporties met gehele getallen moet gebruiken; van 1,618... is daarbij geen sprake. Toch beroepen vele ‘gulden snede-adepten’ zich op de titel van het boek en het prestige van de illustrator, Leonardo da Vinci, om hun betwistbare stellingen kracht bij te zetten. De voorliggende vertaling heeft als doel een meer genuanceerde benadering van deze kwestie te bevorderen.

De concrete aanleiding voor een vertaling

In 2002 vermeldde de Nederlandse kunstenaar Rinus Roelofs, die de illustraties maakte voor deze vertaling, terloops in een voordracht hoe Leonardo da Vinci zich had vergist bij het plaatsen van piramides op de zogenaamde rhombicuboctaëder. Leonardo had namelijk op enkele driehoekige zijvlakken van die rhombicuboctaëder piramides getekend met een vierkantig grondvlak, wat onmogelijk is (zie de cover van dit boek, en in het bijzonder de piramide onderaan). Deze aanmerking op het geometrische werk van Leonardo was de aanleiding tot een publicatie in het populairwetenschappelijke magazine EOS (zie [32]). Dit artikel vormde op zijn beurt de basis voor een Engelse vertaling, gepubliceerd in ‘*Scientific American*’. Onder de titel ‘Lost in Triangulation: Leonardo da Vinci’s Mathematical Slip-Up’ veroorzaakte het artikel onverwacht heel wat opschudding bij de vele onvoorwaardelijke aanhangers van de ‘homo universalis’ (zie [31]). Een fout van Leonardo in een tijdloos vakgebied zoals de meetkunde bleek moeilijker te aanvaarden dan zijn vergissingen op het gebied van de rekenkunde (zie [1]), van de mechanica (zie [68]) of de anatomie (zie [63]), waarvoor de verontschuldiging gold dat hij in een tijdperk leefde met andere werktuigen of waarnemingstechnieken.

Wat oorspronkelijk begon als een artikel over een leuke vondst van een taalgenoot mondde zo uit in de noodzaak tot een verdere studie van het werk van Pacioli en Leonardo. Ook de Nederlandse chemicus Jos Janssen zag het belang hiervan in. Als scheikundige is hij goed

op de hoogte van de geschiedenis van de klassieke veelvlakkenleer, en hij maakte dan ook tal van aantekeningen bij het werk van Leonardo.² Leonardo’s fout omtrent de rhombicuboctaëder staat zelfs letterlijk beschreven in Pacioli’s tekst, maar om dat in te zien moet men toegang hebben tot die tekst. Zo ontstond het idee om deze vertaling uit te werken en hier opmerkingen aan toe te voegen. Om die reden werd aanvankelijk alleen het vertalen van het eerste deel uit de ‘*Goddelijke Verhouding*’ beoogd, omdat dit deel handelt over die al dan niet betwiste beweringen over Leonardo’s veelvlakken. Naderhand besloten we ook het tweede deel, ‘*De Architectura*’ eraan toe te voegen, omdat veel kritiek op het werk van Roelofs, Janssen en mijzelf kwam vanuit de hoek van de hoger beschreven ‘gulden snede-adepten’. Door ook dit deel te vertalen zouden zij zo met eigen ogen kunnen lezen wat Pacioli precies schreef over het esthetische belang van de goddelijke verhouding, en vooral, wat hij er niet over schreef. Het derde deel, de ‘*Libellus*’, is hier niet vertaald: niet alleen omdat het voornamelijk wiskundige berekeningen bevat die bovendien tamelijk uit de tijd zijn, maar ook omdat de ‘*Libellus*’ van de hand is van Piero della Francesca, zoals Pacioli zelf erkende (zie opmerking hierboven).

De vertaling

Het was niet eenvoudig om een specialist te vinden die niet alleen vertrouwd was met het vijftiende-eeuwse Italiaans (lees: ‘Toscaans’) en interesse had in de vele historische connecties vermeld in het werk, maar die ook niet te beroerd was om wiskundige termen te ontleden. Gelukkig bleek de Nederlandse Emma Grootveld, die eind 2017 haar doctoraat over zestiende-eeuwse heldendichten heeft verdedigd aan de KU Leuven (*Autorità e auctoritas. Un approccio discorsivo al dinamismo politico-letterario dei poemi eroici italiani sulle guerre asburgiche in Europa (1530–1630)*), bereid om de autoriteit van Pacioli en Leonardo uit te dagen in de voorliggende vertaling.

In het algemeen is er bij de vertaling naar gestreefd de oorspronkelijke stijl en sfeer van Pacioli’s traktaat te behouden. Toevoegingen zijn daarbij tussen rechte haken (...) geplaatst. De pagina-indeling is gebaseerd op die van de druk uit 1509. De verwijzing naar de pagina’s van die editie laat toe de vertaling eenvoudig met de oorspronkelijke tekst te vergelijken. Er doken best wat moeilijkheden op bij de vertaling, en wanneer deze niet op een sluitende wijze konden worden opgelost, werd dit als zodanig vermeld in de voetnoten. Dit geldt bijvoorbeeld voor de

2. De weerstand die zijn vondsten opriepen bij Leonardo-adepten kan vergeleken worden met de ontdekking van een fout in het werk ‘*Over de Hemel*’ van Aristoteles (zie [66]). Deze stelde daarin ten onrechte dat de tetraëder de ruimte vult. Gedurende meer dan 2000 jaar sloofden aanhangers van Aristoteles zich uit om te bewijzen dat de filosoof het niet verkeerd kon hebben.

titel: soms wordt Pacioli's werk aangeduid met 'Goddelijke Verhouding' (zoals op het titelblad), maar soms ziet men ook het gelatiniseerde 'de[[l]la Divina Proportione'. In het eerste geval is dit dus 'Goddelijke Verhouding', in het tweede 'Over de Goddelijke Verhouding'. Bij de voetnoten staat er [58] wanneer de bron de geannoteerde Franse vertaling is van G. Duchesne en M. Giraud, en [60] indien dit de Engelse vertaling is van Dr. Jonathan Tennenbaum, John P. Scialdone en Richard Sanders. Indien vertaalster Emma Grootveld zelf een noot toevoegde werd dit [EG] en zelf gebruikte ik de notatie [DH]. Combinaties zijn ook mogelijk en worden dan met samenvoegingen van deze letters aangeduid. Persoonlijke opmerkingen van Jean-Marie Dendoncker (wiskundige, UGent) werden aangeduid met [JMD] en opmerkingen van Jos Janssen (chemicus, Leiden) met [JJ].

Pacioli's gebruik van leestekens bleek niet altijd vol te houden: dikwijls breid hij zinnen aan elkaar met een komma of een puntkomma. Deze lange zinnen zijn voor de leesbaarheid in de vertaling meer dan eens opgesplitst. Ook zijn gewoonte om een zin met 'E' ('en') of 'Cioè' ('dat wil zeggen') te beginnen is aan de huidige conventies aangepast. Afkortingen zijn zoveel mogelijk voluit geschreven. Bij taalverwarringen van meer wiskundige aard is per woord de afweging gemaakt wat bij de hedendaagse wiskundige lezer het meest natuurlijk zou klinken. Zo gebruikt Pacioli het woord 'diameter' niet alleen voor de 'lengte van de middellijn' van een cirkel, maar ook als synoniem van 'middellijn' zelf. Dit kan best met enig goed begrip worden geïnterpreteerd, maar wanneer hij het ook heeft over de 'diameter' van een vierkant, waarbij hij de 'diagonaal' bedoelt, ligt het al wat moeilijker. Dikwijls wordt de 'lengte van een lijnstuk' bovendien verward met 'het lijnstuk', net zoals 'cirkel' en 'cirkelschijf'. Pacioli heeft ook geen eenduidige term voor 'rechthoek' (soms noemt hij dit een 'recht parallellogram', soms omschrijft hij het). Bij de meest opmerkelijke gevallen zijn voetnoten toegevoegd.

Een ander probleem waren de talrijke fragmenten in het Latijn die Pacioli her en der verwerkte in zijn tekst. Om deze te vertalen deed Emma Grootveld een beroep op latiniste Laura Migliori, docente aan het Centrum voor Linguïstiek van de Universiteit Leiden, die wij hiervoor erg erkentelijk zijn en bij deze hartelijk bedanken.

De illustraties

Bij gebrek aan een vertaling was de faam van de 'Goddelijke Verhouding' lange tijd vooral gebaseerd op Leonardo's sublieme tekeningen, die men zelfs zonder een woord te lezen kon waarderen. Deze tekeningen zijn nu wijd verspreid op het internet of verschenen in luxueuze

kijkboeken, zoals de 'Antologia della Divina Proporzione', dat alle beelden van de manuscripten en de druk (zie [11]). Hieruit vloeide ook een ander probleem voort: was het zinvol om deze illustraties bij de vertaling opnieuw af te drukken? Er werd voor gekozen om de originele tekeningen in computerversies voor te stellen, als 'vertalingen' van de illustraties naar een actuele beeldtaal. Overigens was het precies langs deze wijze dat kunstenaar Rinus Roelofs, een expert in het tekenen met het 3D-computer-tekenprogramma Rhinoceros, de vermelde geometrische fout in het werk van Leonardo opmerkte, toen hij zijn eigen tekening van de rhombicuboctaëder met die van Leonardo vergeleek.

De lezer kan voortaan ook zelf de nauwkeurigheid van de tekeningen in de 'Goddelijke Verhouding' nagaan. Dit boek geeft de afbeeldingen verschillende malen in een vaste volgorde weer. Eerst ziet men ze zoals ze in de gedrukte versie in Pacioli's boek staan, met inbegrip van eventuele onvolkomenheden. Daarna volgt een, eventueel gecorrigeerde, moderne computerversie, ook in zwart-wit. Vervolgens worden de bouwplaten gegeven, zodat de lezer op eenvoudige wijze een 3D-model kan maken. Tenslotte volgen de afbeeldingen uit de manuscripten, die toegewezen worden aan Leonardo, maar met eventuele correcties en dan wel via een 3D-computerprogramma.

De platen van veelvlakken vormen het enige wiskundige werk van Leonardo da Vinci dat in zijn tijd daadwerkelijk gepubliceerd is. Eigenlijk is er geen enkel 'boek van Leonardo'. Zijn bekendste werk, 'Trattato della pittura', werd samengesteld door zijn vriend Francesco Melzi rond 1542. Het werd in 1651, lang na Leonardo's dood, gedrukt door Raffaello du Fresne in het Italiaans en Frans. Het was gebaseerd op handgeschreven pagina's van Leonardo, op kladwerk dus. Alle andere notities van Leonardo die werden overgeleverd, zijn eveneens werkbladen met tekstjes, schetsen en berekeningen en worden dan ook 'aantekeningen' genoemd.

In de voorliggende tekst wordt in de voetnoten uitvoerig besproken hoe de ene keer een kleurenplaat in een bepaald manuscript beter is dan een gedrukte zwart-witversie, en een andere keer het omgekeerde het geval is. Dit is merkwaardig, maar het kan natuurlijk dat Leonardo alleen schetsen had vervaardigd en dat kopiïsten die vervolgens in zwart-witversies en in kleur hebben omgezet (zie [34]). In elk geval heeft Leonardo wel een cruciale bijdrage geleverd aan het resultaat. En dit is uitzonderlijk, omdat er zelfs met inbegrip van Leonardo's schilderijen slechts een handvol werken zijn overgebleven die hij daadwerkelijk voltooide.

Het paste dan ook om dit boek uit te geven in het jaar 2019, vijfhonderd jaar na Leonardo's overlijden.